»Karopapier, Drehbleistifte und Musik von ABBA«

Die Mathematiker Günter Ziegler und Ralph Neininger im Gespräch mit Anne Hardy

Günter M. Ziegler, Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und Professor an der Technischen Universität Berlin, kam anlässlich des Jahrs der Mathematik zu einem Festvortrag nach Frankfurt. Im vollen Festsaal des Casinos im Campus Westend präsentierte er elegante mathematische Beweise aus dem fiktiven »Buch« der perfekten Beweise. Die Bilder sind nach dem Schema des russischen Mathematikers A. J. W. Duijvestijn als »perfect square« arrangiert.

? Wird Neues in der Mathematik Ihrer Ansicht nach eher entdeckt oder erfunden?

Ziegler: Das ist eine philosophische Frage. Ich arbeite unter der Annahme, dass die Objekte der Mathematik real existieren, man kann sie finden, man kann interessante Objekte entdecken, aber man kann da nichts »erschaffen« oder »erfinden«. Die Annahme ist mir wichtig, weil ich ja hart daran arbeite, Objekte konkret zu verstehen, da will ich nicht gleichzeitig an ihrer Existenz oder Erkennbarkeit zweifeln.

Neininger: Ich würde auch sagen, in der Mathematik werden neue abstrakte Gegenstände entdeckt. Wir untersuchen sie dann auf ihre strukturellen Eigenschaften hin und stellen sie in den Zusammenhang zu anderen Begriffen. Aber es gibt auch Tätigkeiten, bei denen ich eher von »erfinden« sprechen würde, etwa wenn man einen ökonomischen Umgang mit mathematischen Objekten im Sinne eines Kalküls oder eines Algorithmus entwickelt. Das bekannte Verfahren, um den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen zu finden, wurde meines Erachtens von Euclid eher erfunden, wenngleich man natürlich auch sagen kann, er habe das Verfahren entdeckt.

? Gibt es Irrtümer in der Mathematik? Ich meine nicht die Irrtümer eines Einzelnen, sondern eher Lehrsätze oder Forschungsansätze, die von nachfolgenden Mathematiker-Generationen als überholt angesehen werden, so dass Lehrbücher neu geschrieben werden müssen?

» Moden kommen und gehen eben, auch in der Mathematik. «

Ziegler: Es gibt schon Entwicklungen in der Mathematik, die später wie Sackgassen aussehen, wo man dann sagt, »das bringt doch nichts«, und was dann aus den Lehrbüchern verschwindet. Aber die Geschichte verläuft nicht linear, und auch Fächer, die ganz aus der Mode gekommen sind, können später wieder wichtig werden. Moden kommen und gehen eben, auch in der Mathematik. Dabei ist es schon bemerkenswert, dass es da offenbar keine größeren Fehler gegeben hat. Ich glaube nicht, dass irgendwann die Lehrbücher revidiert werden mussten, weil eine größere Sache einfach nicht stimmte. Ein »ganz großer und berühmter Irrtum«, der erst nach Jahrzehnten aufgefallen wäre und der einen ganzen Mathematikbereich zum Einstürzen gebracht hätte, fällt mir auf Anhieb nicht ein. Natürlich gibt es kleine, einzelne Fehler, aber die Kontrollmechanismen funktionieren sehr gut, und Mathematik ist eben auch ein System, wo alles zusammenpassen muss. Wenn da irgendwo ein Fehler drinsteckt, dann führt das bald zu weiteren Widersprüchen – und der Fehler fliegt auf.

Neininger: Dass es Forschungsgebiete gibt, die quasi außer Mode gekommen sind, deren Aussagen dennoch wahr bleiben, sehe ich auch so. Man kann außerdem nicht ausschließen, dass diese Gebiete später in neuem Kontext wieder an Bedeutung gewinnen. Es gibt Beispiele von Theorien, die zunächst ad acta gelegt wurden, später aber an Vitalität gewonnen haben.

? Galileo Galilei hat gesagt, das Buch der Natur sei in der Sprache der Mathematik geschrieben. Ein berühmtes Beispiel ist der Wettlauf zwischen einem Physiker und einem Mathematiker, Albert Einstein und David Hilbert, um die richtigen Gleichungen zur Beschreibung der allgemeinen Relativitätstheorie. Wie kann es sein, dass ein logisches Konstrukt, das auf nicht weiter begründbaren Axiomen beruht, die Natur so treffend beschreibt? Schon Kant hat sich gefragt: »Allein, wie kann Anschauung des Gegenstandes vor dem Gegenstand selbst vorhergehen?.

Prof. Dr. Ralph Neininger, Stochastiker an der Universität Frankfurt, und Prof. Dr. Günther Ziegler, Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, im Gespräch.

Ziegler: Das ist eine der ganz großen philosophischen Fragen: Warum lässt sich die Natur so gut mit mathematischen Methoden beschreiben? Warum gehorcht sie den Formeln? Die Welt ist ja sicher nicht nach einem Bauplan aus mathematischen Formeln geschaffen worden. Der Physik-Nobelpreisträger Eugene Wigner sprach von der »unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences«, wobei »unreasonable« nicht nur unvernünftig, sondern auch unerklärlich, unergründbar heißt.

»Einfache mathematische Objekte, etwa der Geometrie, sind durch Grundstrukturen der Natur motiviert«

Neininger: Es ist schwierig zu spekulieren, wie das sein kann. Natürlich können abstrakte Modelle der Natur durch Ergebnisse von Experimenten adaptiert werden, um immer zutreffendere Beschreibungen zu erhalten. Ein tieferer Grund wird manchmal darin gesehen, dass einfache Strukturen und Objekte der Mathematik, etwa der Geometrie, durch Grundstrukturen der Natur motiviert sind. Die Grundlage des mathematischen Erkenntnisgewinns wären dann also Strukturen, die auch für das faktische Naturgeschehen, etwa in der Physik, grundlegende Bedeutung haben. Das Naturgeschehen stünde quasi mit am Anfang der Mathematik oder, um es mit Goethe etwas poetischer zu sagen: »Wär nicht das Auge sonnenhaft, die Sonne könnt es nie erblicken.«

? Wie kommt es, dass man strukturelle Analogien zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik wie Geometrie und Algebra herstellen kann? Eines der frühen Beispiele ist die Entdeckung des französischen Mathematikers Abraham de Moivre, dass man die dritte Wurzel aus einer komplexen Zahl ziehen kann, indem man geometrisch die Dreiteilung eines Winkels vollzieht. Ist das eine häufig angewandte Methode? Ist die Geometrie verständlicher als die Algebra, weil sie anschaulicher ist?

Neininger: Die Unterscheidung von algebraischen und geometrischen Objekten stammt von den alten Griechen. Der Zahlbegiff war damals eng gefasst, und auch die Vorstellung vom Raum, in welchem die Gegenstände der Geometrie liegen, war wenig entwickelt. Heute sind die Objekte der Geometrie und Algebra schwer zu unterscheiden, man denke etwa an Symmetrien im Sinne der Geometrie und die Symmetriegruppen der Algebra. Algebra und Geometrie bieten aber verschiedene Betrachtungsweisen: Während beim algebraischen Zugang Formeln und Gleichungen im Vordergrund stehen, operiert die geometrische Betrachtung von einer »abstrakten Anschaulichkeit« her. Es ist in der modernen Mathematik typisch, dass Probleme mit unterschiedlichen Methoden bearbeitet werden und sich ehemals verschiedene Gebiete überlappen und gegenseitig beeinflussen.

»Wenn der Zufall in die diskrete Mathematik reinspielt, dann wird's spannend!«

Ziegler: Solche Brückenschläge kommen immer wieder vor, und die sind wichtig. Für die Mathematik besteht wie für andere Wissenschaften die Gefahr, mit fortschreitender Entwicklung in immer ausgefeiltere und kompliziertere Subspezialisierungen zu zerfallen, so dass der Blick für's große Ganze verloren geht. Dabei sind die Brücken zwischen den Gebieten oft entscheidend: Dass man Geometrie mit algebraischen Methoden in den Griff kriegen kann, ist eine ganz wichtige Erkenntnis, zu der Descartes entscheidend beigetragen hat. Und wenn topologische Methoden in der Geometrie anwendbar werden, oder wenn der Zufall in die diskrete Mathematik reinspielt, dann wird's spannend!

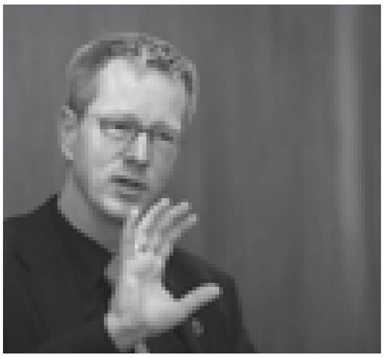
? Die Göttinger Mathematikerin Emmy Noether hat den Physikern einen großen Dienst erwiesen, indem sie nachwies, dass es zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen einen mathematischen Zusammenhang gibt. Gleichungen, die unter bestimmten Symmetrie-Operationen invariant bleiben, gehören zu den wichtigsten Werkzeugen der Physiker. Solche Gleichungen empfinden sie auch als besonders schön. Gibt es auch so etwas wie Schönheit in der Mathematik?

Ziegler: Ja, viele Mathematiker haben sehr klare Vorstellungen davon, was in der Mathematik »schön« ist – und sind notfalls auch dazu bereit, darüber zu streiten. Man kann sich der Schönheit nähern, man kann Beispiele sammeln, aber wie in anderen künstlerischen Bereichen entzieht sich die Schönheit der Definition.

Mein Berliner Kollege Martin Aigner und ich haben ja mal angefangen, Beispiele von »schönen« Beweisen zu sammeln. Unser Buch, »Das BUCH der Beweise«, ist ein Welterfolg geworden, es liegt derzeit in zwölf Sprachen vor, wird ins Chinesische übersetzt – offenbar haben wir mit der Sammlung und Ausstellung des »Schönen« in der mathematischen Beweisführung einen Nerv getroffen…

»Kurze oder zunächst überraschende Beweise gelten als schön.«

Neininger: Ich würde sagen, in der Mathematik gelten weithin prägnante Formulierungen komplexer Sachverhalte und kurze oder zunächst überraschende Beweise als schön. Ich denke auch, dass ein überraschendes Argument für einen Sachverhalt einen hohen ästhetischen Reiz auf viele Mathematiker ausübt. Allerdings erfordert diese Art der Empfindung häufig eine erhebliche Vorbildung. Wenn dagegen etwa meine Freundin am Klavier spielt und dazu singt, ist der ästhetische Reiz wesentlich unmittelbarer!



? Welche mathematischen Gleichungen sind Ihnen persönlich besonders wichtig?

Neininger: Für mich ist zum Beispiel die Normalverteilung, deren Dichte auf dem 10 DM-Schein abgebildet war, besonders wichtig. Auch die damit zusammenhängenden Gleichungen und Objekte, etwa die Stirling'sche Formel, die Normalapproximation oder die Brown'sche Bewegung. In meinem Arbeitsgebiet, der Stochastik, spielen sie eine zentrale Rolle.

Ziegler: Ich bin ja Geometer, mir liegen die geometrischen Objekte näher als die Formeln. Das »24-Zell« etwa, eine vier-dimensionale Struktur mit 24 Ecken, ist vielleicht das schönste Objekt der Mathematik. Wenn Sie eine Gleichung hören wollen, dann ist mein Favorit die Euler'sche Polyederformel: »$e-k+f=2$«. Sie verweist auf einen versteckten topologischen Zusammenhang, dem alle (3-dimensionalen) Polyeder genügen: Eckenzahl minus Kantenzahl plus Flächenzahl gleich zwei.

? Wie kamen Sie selbst zur Mathematik? Was fasziniert Sie daran?

Ziegler: Meine Einstiegsdroge waren die Mathematikwettbewerbe, als erster der Bundeswettbewerb Mathematik, später dann auch »Jugend forscht«.

Mich hat das Knobeln, die Herausforderung und das Spiel mit ganz klaren und unnachgiebigen Spielregeln gereizt, da wollte ich auch mir und allen anderen beweisen, was ich kann. Und das Spiel ist so vielfältig: ein ganz großer Abenteuerspielplatz, mit ganz aufregenden Spielgegenständen!

Neininger: Das Interesse an der Mathematik war bei mir von jeher da. Es ging immer schon darum, Probleme zu lösen, die sich nicht direkt knacken lassen. Die Faszination hat sich im Laufe der Jahre allerdings immer wieder gewandelt. Meine Diplomarbeit schrieb ich in der Geometrie. Danach faszinierten mich das Konzept des Zufalls und seine Konsequenzen mehr. Mittlerweile interessiere ich mich sehr dafür, wie stochastisches Wissen bei der Untersuchung realerer Probleme eingesetzt werden kann, insbesondere bei Fragen, die aus der Informatik oder der kombinatorischen Optimierung stammen. Viel Motivation gibt mir auch die Kooperation mit manchen Kollegen.

? Welche Rolle spielt für Sie die Vorstellung von abstrakten Gegenständen? Kommunizieren Sie »unscharfe« Bilder oder Vorstellungen auch im Gespräch mit Kollegen? Oder unterhalten Sie sich eher, indem Sie in Ihrem Büro eine Tafel mit Gleichungen voll schreiben?

Neininger: In einer ersten Phase der Problemlösung verknüpfe ich häufig passende Methoden und Ideen zunächst eher intuitiv miteinander, um eine vage Strategie für den Lösungsweg zu entwerfen. Das sind eher »unscharfe Bilder«, die aber auch an der Tafel diskutiert werden können. Wenn sich so ein gangbarer Weg abzeichnet, geht es an die Details der Beweisführung. Diese können dann recht technisch werden. Das macht man dann besser erst mal allein.

Ziegler: Eine Vorstellung abstrakter Gegenstände ist ja ein Widerspruch in sich, und den gilt es aufzulösen. Auch die Zahlen eins, zwei, drei sind ja eigentlich abstrakt. Mathematisches Arbeiten heißt für mich, mit den Gegenständen umzugehen, zu rechnen, zu visualisieren, zu spielen – bis ich sie »in den Griff kriege«, bis ich sie mir vorstellen kann, bis ich sie konkret vor Augen habe oder konkret im Computer, oder bis sie algebraisch behandelbar sind. Bis sie eben nicht mehr abstrakt sind.

Wie kommuniziert man über Strukturen, die man noch nicht ganz verstanden hat? Da sind alle Werkzeuge erlaubt, wir reden über unsere Vorstellung, wir arbeiten mit sehr schematischen Skizzen, besprechen die Daten von Beispielen, und so weiter, jedesmal anders. Ich selbst arbeite nicht gern an der Tafel, lieber zu zweit oder zu dritt mit einem Blatt Karopapier auf dem Tisch.

? Der Physiker Ernest Rutherford hatte zwei Strategien, wenn er mit einem Problem nicht weiterkam: Entweder er fuhr sehr schnell mit dem Auto über kurvige Landstraßen oder er las auf dem Sofa tagelang Krimi während das Problem in seinem Unterbewussten weiter arbeitete. Was machen Sie in ähnlichen Situationen? Und wie ist das Gefühl, wenn Sie eine »harte Nuss geknackt« haben?

Neininger: Ich muss das Problem auch häufig etwas mit mir rumtragen und mehrfach überschlafen. Morgens unter der Dusche kam schon der ein oder andere nützliche Einfall. Ein Problem lösen, an dem man lange gearbeitet hat, ist natürlich ein sehr befriedigendes Gefühl. Manchmal bricht aber auch ein Argument wieder zusammen, weil man etwas übersehen hat. Diese Momente, in denen dann eine mehrmonatige Arbeit quasi am seidenen Faden hängt, sind sehr unangenehm.

Ziegler: Ich brauche einen Block Karopapier, Drehbleistifte, die Stereoanlage im Hintergrund mit Musik, die ich mag, gut kenne, die mich nicht ablenkt – das kann ABBA oder Bach oder Johnny Cash sein…, Kaffee, und ansonsten wenig Ablenkung.

Aber Ideen sind nicht planbar: Wenn man hart an einem Problem arbeitet, dann geht die Arbeit im Hinterkopf weiter. Und plötzlich leuchtet dann eine Idee auf: Das kann im Bett sein, wie bei Gauß' Entdeckung des 17-Ecks, unter der Dusche, in der Kirche – dort hatte Dirichlet einen guten Einfall, beim Einsteigen in den Bus wie Poincaré, und so weiter. Ich habe da mal Berichte gesammelt, der Aufsatz hieß »Wo Mathematik entsteht. Zehn Orte«, nachzulesen unter: www.gegenworte.org/heft-16/ziegler16.html.

Das Gefühl, eine harte Nuss geknackt zu haben: Kenne ich, ist etwas ganz seltenes. Das ist dann ein Punkt, wo man entweder unendlich glücklich und erschöpft ist und erst mal schlafen will – oder aber es sofort jemandem erzählen muss. Manchmal darf dann auch der Prosecco fließen. Wir Mathematiker können feiern!

? Zum Schluss: Was wünschen Sie sich vom Jahr der Mathematik?

Neininger: Dass es uns gelingt, ein zutreffendes Bild der Mathematik zu vermitteln und dass dadurch Schüler, die Freude an der Mathematik haben könnten, Mathematik studieren!

Ziegler: Ich wünsche mir, dass von der Mathematik ein neues, vielfältiges, attraktives, spannendes Bild in die Öffentlichkeit transportiert wird. Es gibt so viel zu entdecken – das soll deutlich werden. Und das Bewusstsein und das Interesse daran soll bleiben, auch über das Jahr 2008 hinaus! ◆